Ein einfaches Wartezeitproblem

Stefan Götz, Wien

Zusammenfassung: *In dieser Note wird ein diskretes Modell für Wartezeiten vorgestellt, das elementar auszuwerten ist. Dabei werden nur geometrische Reihen und ihre Derivate verwendet. Eine Simulation in Excel hilft, die erhaltenen Resultate „empirisch“ zu bestätigen.*

1 Einleitung

Sieht man von der geometrischen Verteilung ab, sind Wartezeitprobleme oft komplex und für die Schule daher wenig geeignet (vergleiche z. B. das Sammlerproblem in Henze (2010), S. 185 ff.). Andererseits gehören Fragen wie „Wie lange muss man im Mittel warten, bis …?“ zu den klassischen Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. nochmals Henze (2010), Kapitel 23). In Langlotz und Zappe (2015) nun wird die Euler’sche Zahl mit folgendem Zufallsexperiment simuliert: „Man addiere Zufallszahlen zwischen 0 und 1 solange, bis die Summe größer 1 ist. Manchmal genügen zwei, manchmal drei …“ (S. 24). Es zeigt sich, dass im Durchschnitt 2,71828… Zahlen gebraucht werden (ebd.). Gemeint ist die Euler’sche Zahl, für die mathematische Erklärung wird auf Engel (1976), S. 93 ff., verwiesen. Auf S. 102 ebenda findet sich noch eine diskrete Version eines analogen Problems, die allerdings einiges an kombinatorischem Aufwand verlangt.

Eigentlich ein Lesefehler (!) hat mich auf folgende Abwandlung dieses Problems gebracht. Die Zufallszahlen können mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$ *nur die Werte 0 oder 1* annehmen.

2 Eine diskrete Verteilung

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Summanden, die notwendig ist, damit die kumulierte Summe den Wert 1 erstmals übersteigt. Anders ausgedrückt: sobald unter den Zufallszahlen zwei Einser vorkommen, ist der Prozess des Summierens zu Ende. Wie lange dauert das im Mittel? Formal fragen wir nach dem Erwartungswert von X, wobei $X := \min\{n \in \mathbb{N} : S_n > 1\}$ mit $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$ definiert wird. Dabei sind die 0/1-wertigen Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängig voneinander und Bernoulli-verteilt mit dem Parameter $0,5$.

Die Verteilung von X ist schnell gefunden: Ihr Wertebereich sind die natürlichen Zahlen. Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{P}(X = n) = 0,5^{n-1} \cdot 0,5 \cdot \binom{n-1}{1}$, für $n = 0$ und $n = 1$ verschwinden die Wahrscheinlichkeiten (Abb. 1).

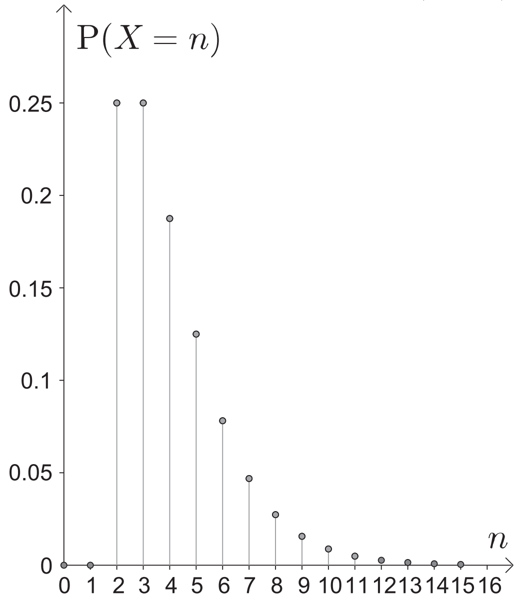

Abb. 1: Die Verteilung von X

Zur Übung berechnen wir zuerst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{\infty} 0,5^n \cdot (n-1)\ .$$

Dazu betrachten wir die Funktion f mit

$$f(x) := \sum_{q=0}^{\infty} x^q = \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad |x| < 1\ ,$$

also die konvergierenden geometrischen Reihen. Ihre Ableitung ist $f'(x) = \sum_{q=1}^{\infty} q \cdot x^{q-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ unter den gehörigen Voraussetzungen (vgl. Heuser (1986), S. 368). Daraus folgt $\sum_{q=2}^{\infty} q \cdot x^{q-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$. Damit ist $\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)$ gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} 0,5^n (n-1) = \\ = \ & \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot 0,5^n - \left(\frac{1}{1-0,5} - 1 - \frac{1}{2} \right) = \\ = \ & 0,5 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot 0,5^{n-1} - \frac{1}{2} = \\ = \ & 0,5 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 \right) - \frac{1}{2} = 1\ . \end{aligned}$$

Stochastik in der Schule 36 (2016) 3, S. 16–20

Für die Erwartungswertberechnung von X benötigen wir die zweite Ableitung von f: es gilt

$$f''(x) = \sum_{q=2}^{\infty} q \cdot (q-1) \cdot x^{q-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \,.$$

Dies verwenden wir, um

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot 0{,}5^n = \\ &= 0{,}5^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot 0{,}5^{n-2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \end{aligned}$$

zu berechnen. Es werden also auf lange Sicht durchschnittlich vier Summanden gebraucht, um den Summenwert 1 zu übersteigen. Oder: wir benötigen im Schnitt (auf lange Sicht) vier Zufallszahlentnahmen, bis wir darunter zwei Einser finden, davon einer am Schluss.

Auch die Varianz von X kann auf diese Weise ermittelt werden. Wir benutzen dazu den Verschiebungssatz und berechnen $\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot 0{,}5^n \cdot (n-1)$. Der Trick dabei ist, den Ausdruck $n(n-2)+2n$ statt n^2 in $\mathrm{E}(X^2)$ einzusetzen. So können wir wieder die reiche Quelle der konvergierenden geometrischen Reihen anzapfen. Die dritte Ableitung von f lautet

$$f'''(x) = \sum_{q=3}^{\infty} q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \cdot x^{q-3} = \frac{6}{(1-x)^4} \,.$$

So bekommen wir für das gesuchte Moment von X:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (n-2) \cdot 0{,}5^n \cdot (n-1) + \\ &\quad +2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot 0{,}5^n = \\ &= 0{,}5^3 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot 0{,}5^{n-3} + \\ &\quad +2 \cdot 0{,}5^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot 0{,}5^{n-2} = \\ &= 0{,}5^3 \cdot \frac{6}{0{,}5^4} + 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot \frac{2}{0{,}5^3} = 20 \,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 20 - 4^2 = 4$ für die Varianz von X. Die Standardabweichung von X ist also $\mathrm{D}(X) = 2$.

3 Eine Verallgemeinerung

Wie lange müssen wir im Durchschnitt warten, bis die Summe der Zufallszahlen größer als eine beliebige natürliche Zahl k (>1) wird? Nun sieht die Verteilung der entsprechenden Zufallsvariablen X_k folgendermaßen aus: $\mathrm{P}(X_k = n) = 0{,}5^n \cdot \binom{n-1}{k}$ für $n \geq k+1$ (n durchläuft die natürlichen Zahlen), ansonsten ist $\mathrm{P}(X_k = n) = 0$. Jetzt muss die $(k+1)$-te Ableitung von f helfen:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{q=k+1}^{\infty} q \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot (q-k) \cdot x^{q-k-1} = \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \,. \end{aligned}$$

Eine ganz ähnliche Rechnung wie im vorigen Abschnitt liefert nun $\mathrm{E}(X_k) = 2 \cdot (k+1)$. Salopp formuliert sind also im Durchschnitt doppelt so viele Zufallszahlen zu „ziehen“ wie wir an Einsern brauchen.

Auch für die Verallgemeinerung der Varianzbestimmung funktioniert die Methode der Ableitungen der geometrischen Reihe. Um $\mathrm{E}({X_k}^2)$ zu berechnen, ersetzen wir n^2 in der Summe

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot 0{,}5^n$$

durch $n \cdot (n-k-1) + (k+1) \cdot n$. Wiederum rechnen wir ähnlich wie im vorigen Abschnitt (diesmal auch mit der $(k+2)$-ten Ableitung von f) das zweite Moment von X_k aus: $\mathrm{E}({X_k}^2) = 2 \cdot (k+1) \cdot (2k+3)$. Die Varianz von X_k wird dann gemäß $\mathrm{D}^2(X_k) = \mathrm{E}({X_k}^2) - \mathrm{E}(X_k)^2$ zu $2 \cdot (k+1)$, ist also gleich dem Erwartungswert von X_k. Die numerische Übereinstimmung von $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{D}^2(X)$ in Abschnitt 2 gilt also allgemein.

4 Eine Simulation

Mit Excel kann der in Rede stehende Vorgang leicht simuliert werden[1]. Es wird sukzessive die Summe von Zufallszahlen (rekursiv) gebildet, die nur die Werte 0 oder 1 (Runden von Zufallszahlen aus [0,1)) mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ annehmen. Jedes Mal wird geprüft, ob die neue Summe weiterhin kleiner gleich 1 ist. Die Kontrollstruktur wird durch eine Do-While-Schleife realisiert. Pro Durchlauf erhöht sich der Wert einer Zählvariable um eins. Sobald die Summe den Wert 2 erreicht, wird die Anzahl der dafür benötigten Summanden („Wartezeit“) mit Hilfe dieser Zählvariable ausgegeben. Das ist ein Durchlauf. Nach 15 Durchläufen ergibt sich z. B. ein mittlerer Wert von 3,73, nach 30 Durchläufen der Mittelwert 3,67, nach 41 schließlich ist das arithmetische Mittel 3,90. Bei 200 Durchläufen landen wir schon sehr nahe bei 4 (i. e. 4,0450). Diese Realisationen von Momentenschätzern stützen also das in Abschnitt 2 erhaltene Ergebnis für $\mathrm{E}(X)$.

Auch die relativen Häufigkeiten einzelner Versuchsausfälle können leicht bestimmt werden. So stellen wir z. B. nach 200 Durchläufen 52-mal die Anzahl 2 fest, dagegen nur 42-mal die Wartezeit 3. Insgesamt ergibt sich hier eine relative Häufigkeit von 0,47, die von der Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X=2 \vee X=3)=\frac{1}{2}$ vorhergesagt wird. Das Maximum in dieser Datenreihe ist übrigens 11 (!), es wird zweimal (!) angenommen. Das ist doppelt so oft wie erwartet, denn $\mathrm{P}(X=11)=0,5^{11} \cdot \binom{10}{1} \approx 0,5\%$.

In Abb. 2 sehen wir die starken Schwankungen der simulierten Datenmenge.

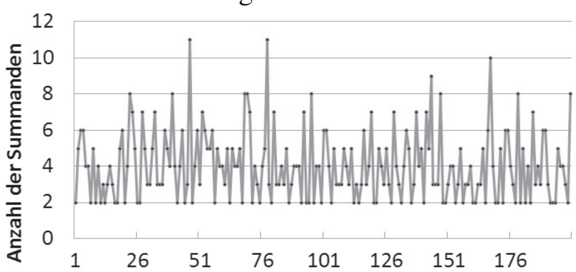

Abb. 2: Mit Excel simulierte Wartezeiten

Mit dem in Abschnitt 2 berechneten Wert der Standardabweichung von X können wir Wahrscheinlichkeiten für σ-Umgebungen berechnen[2]. Die σ-Umgebung von $\mu := \mathrm{E}(X)$ ist $\{2,3,4,5,6\}$. Mit Wahrscheinlichkeit $1-\sum_{n=2}^{6} 0,5^n \cdot (n-1) \approx 0,11$ fällt daher eine Realisation von X außerhalb dieser Umgebung. Die entsprechenden Werte für die 2σ- und die 3σ-Umgebung sind 0,035 und 0,011 (gerundet).

5 Eine geänderte Problemstellung

In Engel (1976) wird auch — unter nicht geänderten Voraussetzungen, also auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallszahlen werden generiert — folgende Problemstellung betrachtet: stoppe, sobald eine Zahl größer ist als die unmittelbar vorangehende (S. 93).

Sei Y unter den in dieser Arbeit festgesetzten Voraussetzungen die Zufallsvariable, die anzeigt, nach wie vielen Durchgängen gestoppt wird. Ihr Wertebereich sind die natürlichen Zahlen, wobei $\mathrm{P}(Y=0)=0=\mathrm{P}(Y=1)$ gilt. Für das Ereignis $Y=2$ notieren wir die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ entsprechend der Folge 01. Nach drei Schritten wird gestoppt, wenn 001 oder 101 der Fall ist. Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$. Analog sehen wir $\mathrm{P}(Y=4)=\frac{3}{16}$ wegen 0001, 1001 und 1101, und schließlich folgt aus den Möglichkeiten 00001, 10001, 11001 und 11101 die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(Y=5)=\frac{4}{32}$. Systematisch betrachtet erhalten wir aus dem Bisherigen $\mathrm{P}(Y=n)=\frac{n-1}{2^n}$ für $n=2,3,4,\ldots$ Das ist die Verteilung von X in Abschnitt 2. Auch in Engel (1976) ist eine analoge Übereinstimmung gegeben (S. 97).

6 Die Kür: Erzeugende Funktionen

So wie die bisherigen Herleitungen funktioniert auch jene für die erzeugende Funktion G_X von X aus Abschnitt 2. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
G_X(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \mathrm{P}(X=n) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot (n-1) = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2} \cdot (n-1) = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2} = \\
&= \left(\frac{x}{2-x}\right)^2
\end{aligned}$$

für $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ bzw. $|x| < 2$ wieder mit Hilfe der ersten Ableitung von f.

Derselbe Konvergenzradius ist für die erzeugende Funktion G_{X_k} von X_k (Abschnitt 3) der Fall. Ihr Funktionsterm lautet $G_{X_k}(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)^{k+1}$, er wird mit Hilfe der k-ten Ableitung von f berechnet.

Mit erzeugenden Funktionen und ihren Ableitungen können die Ergebnisse für Erwartungswert und Varianz von X bzw. X_k aus den Abschnitten 2 und 3 verifiziert werden.

Wenn wir mit X_0 konsequenterweise jene Zufallsvariable bezeichnen, die anzeigt, wann zum ersten Mal „1" erschienen ist, also der Summenwert 0 der Zufallszahlen überstiegen worden ist — X_0 ist daher geometrisch verteilt mit $p=0,5$ —, dann hat die erzeugende Funktion G_{X_0} von X_0 die Funktionsgleichung $G_{X_0}(x)=\frac{x}{2-x}$ für $|x|<2$. Wir konstatieren daraus, dass $G_{X_k}(x)=[G_{X_0}(x)]^{k+1}$ der Fall ist. Das bedeutet aber, dass die Zufallsvariable X_k als Summe von $k+1$ ident wie X_0 verteilten, voneinander unabhängigen Zufallsvariablen aufgefasst werden kann (vgl. Rosanow (1974), S. 89 f.). Der Prozess der Generierung von Zufallszahlen 0 oder 1 und das Betrachten ihrer Summe ist also äquivalent zum Zählen der auftauchenden Einser in der Zufallszahlenreihe, wobei nach jedem Einser von neuem zu zählen begonnen wird, und zum Schluss die Gesamtanzahl der Zufallszahlgenerierungen bestimmt wird. Dahinter steckt, dass eine Summe von unabhängigen ident geometrisch verteilten Zufallsvariablen negativ binomialverteilt ist (vgl. Henze (2010), S. 183). Die negative Binomialverteilung beschreibt das Warten z. B. auf den $(k+1)$-ten Treffer, also die Wahrscheinlichkeit, dass der $(k+1)$-te Treffer $(k=0,1,2,3,\dots)$ im n-ten Versuch $(n \geq k+1)$ auftritt. Als zugehöriger Grundraum kann die Menge Ω aller „Wörter" aus Nullen und Einsern angesehen werden, die genau $k+1$ Einser enthalten mit einem Einser am Schluss. Die Wartezeit X_k ist dann gerade die Länge n des Wortes $\omega \in \Omega$ und $\mathrm{P}(X_k = n)$ ist wie in Abschnitt 3 angegeben (vgl. Henze (2010), S. 180 ff.).

Die Darstellung von X_k als Summe von $k+1$ unabhängigen, geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p=0,5$ führt zu folgendem Plausibilitätsschluss: Warten auf den ersten Treffer dauert im Mittel $\frac{1}{p}=2$ Versuche (Erwartungswert der geometrischen Verteilung), für den $(k+1)$-ten Treffer braucht es wegen der Unabhängigkeit durchschnittlich $(k+1)\cdot\frac{1}{p}$ Versuche, also $2\cdot(k+1)$ (siehe dazu auch Haake (2006), S. 29).

7 Didaktisches Resümee

Einmal mehr stellt sich die geometrische Reihe als zentrale Thematik in der (Schul-)Mathematik heraus, ihre Bedeutung kann kaum überschätzt werden. Für die Schule ist sie wohl die einzige konvergierende Reihe, sieht man vielleicht von einzelnen TAYLOR- oder FOURIER-Reihen ab. Mit ihr und ihren Ableitungen gelingt es, eine Reihe von geschlossenen Formeln für Summen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} n^k \cdot p^n$ mit k eine feste natürliche Zahl und $p \in (0,1)$ herzuleiten. Eine Variation der Parameter eröffnet zahlreiche Übungsmöglichkeiten für diese Methode.

Zur Berechnung dieser Summen kann alternativ so vorgegangen werden[3]: Setzen wir $S_0 := \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, so ist $S_0 = 1+qS_0$ und daher $S_0 = \frac{1}{1-q}$. Analog folgt für $S_1 := \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$, dass $S_0 + qS_1 = S_1$ gilt, also finden wir $S_1 = \frac{1}{(1-q)^2}$. Schließlich ist für $S_2 := \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}$ die Gleichung $2S_1 + qS_2 = S_2$ zu verifizieren, so dass wir $S_2 = \frac{2}{(1-q)^3}$ feststellen. Usw. Dieser Zugang vermeidet das Differenzieren geometrischer Reihen, allerdings müssen die Definitionen von S_i motiviert und Zusammenhänge zwischen S_i und S_{i+1} wie eben gefunden werden.

Wenn auch die Analysis hier nur eine dienende Funktion hat, um stochastische Konzepte zu konkretisieren, so ist doch das Zusammenwirken verschiedener mathematischer Gebiete (und ihrer Methoden und Ansätze) gerade in der Schulmathematik immer wieder spannend. Darüber ist viel geschrieben worden, dies ist ein weiterer kleiner Beitrag hierzu.

In dieser Note wird „Simulation im Wechselspiel mit analytischen Methoden" (Biehler und Maxara (2007), S. 46) gesehen. Sie stützt die auf theoretischem Wege erhaltenen Ergebnisse. Das Sammeln von Daten, die in einer eigenen Liste abgelegt werden, entspricht Schritt 3 des Simulationsplans von Biehler und Maxara (2007), S. 48. Das Bilden von relativen Häufigkeiten und arithmetischen Mittelwerten (Schritt 4 ebd.) bereitet die Interpretation und Validierung vor (ebd.), letztere wird durch Prüfung auf numerische Übereinstimmung vollzogen.

In dieser einfachen und überschaubaren stochastischen Situation kann die Simulation aber auch zur Repräsentation verwendet werden, wie das ebenfalls in Biehler und Maxara (2007) auf S. 46 angesprochen wird. Wir haben auf die Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten als Prognosewerte von relativen Häufigkeiten in (großen) Stichproben in Abschnitt 4 hingewiesen. Analoges leistet der Erwartungswert für das arithmetische Mittel von ebensolchen.

Sowohl die theoretische Ausführung des Konzepts „diskrete Zufallsvariable", wobei X bzw. X_k keiner in der Schule gängigen Zufallsvariablen entspricht, als auch die Simulation der stochastischen Situation verlangen planerische, ausführende und reflexive Tätigkeiten, die wiederum deklaratives und operatives Wissen erfordern. So ist das vorhin angesprochene Wechselspiel nicht nur auf der inhaltlichen, sondern auch auf der Handlungsebene gegeben.

Anmerkungen

[1]Ich danke Frau Simone Lechner (Wien) für die Erstellung eines entsprechenden Makros.

[2]Dabei ist nun $\sigma := \mathrm{D}(X)$.

[3]Hinweis in einem Gutachten.

Literatur

Biehler, R. und Maxara, C. (2007): Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht 53* (3), S. 45–62.

Engel, A. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 2. Stuttgart: Klett.

Haake, H. (2006): Elementare Zugänge zum Problem der vollständigen Serie. *Stochastik in der Schule 26* (3), S. 28–33.

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Heuser, H. (1986): Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Stuttgart: B. G. Teubner.

Langlotz, H. und Zappe, W. (2015): 10 Jahre Leitidee Daten und Zufall – ein Blick nach Thüringen. *Stochastik in der Schule 35* (1), S. 18–24.

Rosanow, J. A. (1974): Wahrscheinlichkeitstheorie. Reinbek bei Hamburg: rororo vieweg.

Anschrift des Verfassers

Stefan Götz
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien
Österreich
stefan.goetz@univie.ac.at